



TITLE:

# 長方形管内の層流の不安定性と乱流二次流の発生(乱流の発生と統計法則II)

AUTHOR(S):

巽, 友正; 吉村, 卓弘

---

CITATION:

巽, 友正 ...[et al]. 長方形管内の層流の不安定性と乱流二次流の発生(乱流の発生と統計法則II). 数理解析研究所講究録 1993, 852: 1-10

ISSUE DATE:

1993-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83726>

RIGHT:

## 長方形管内の層流の不安定性と乱流二次流の発生

京工繊大 巽 友正 (Tomomasa Tatsumi)

日立製作所 吉村卓弘 (Takahiro Yoshimura)

## 1. 乱流二次流

円形以外の断面をもつ真直ぐな管の中の流れは、層流状態では管軸方向だけの流れであるが、乱流になると断面内に中心から隅に向かう流れができ、それによって軸方向の速度分布が著しく変わる。このことは、すでに1926年にNikuradse [1] によって実験的に見いだされており、この断面内の流れは、Prandtl [2] によって“乱流二次流” (turbulent secondary flow) と名付けられている。

(Fig. 1)

乱流二次流は、立体的に見れば管軸に平行な縦渦であり、この意味で、この二次流は最も古くから知られた乱流の“秩序構造” (coherent structure) であるといえよう。近年、乱流境界層などにおいて観測され、馬蹄渦やバーストなどと呼ばれる局所的な秩序構造は、それ自身のエネルギーは極めて小さいにもかかわらず、乱流領域を通じての運動量、エネルギー、熱、物質などの輸送を著しく促進し、それによって乱流全体の構造と統計的性質に大きな影響を及ぼすことが知られている。このため、これらの秩序構造は、近年急速に発達した実験的・数値解析的手法を用いて盛んに研究され、理論的にもさまざまなモデル化の試みがなされている。しかしながら、これらの秩序構造はいずれも、現れては消えてゆく非定常で不安定なものであるため、全体像を把握することが難しく、研究はまだ現象記述の域を出ていないように思われる。

一方、乱流二次流は、管軸方向に一様で時間的にも定常な縦渦という簡単な構造をもち、また、それが乱流の平均速度分布を大きく支配することも明かであるにもかかわらず、これまで実験家や数値計算家の興味を引くことが少なかった。

乱流二次流に関する研究は、これまで、主として乱流の統計的モデルを用いた実用計算として行われ、また計算の便宜上、正方形断面の管流が主な対象となっ

た。しかし、有名な  $K-\varepsilon$  モデルをはじめとする従来の乱流モデルは、いずれも Reynolds 応力に対して、スカラー量の乱流粘性を用いた等方的な表式を採用していたために、まさに Reynolds 応力の非等方性に起因する乱流二次流を再現することができなかった (Bradshaw [3] を参照)。このため、Reynolds 応力の非等方性を考慮した乱流モデルが提案され、Fig. 2 の Demuren & Rodi [4] の計算結果が示すように、実験結果をある程度再現することに成功している。しかし、この種の計算は、可変定数の決定に理論的根拠をもたないため、たとえ実験結果が再現できたとしても、それを予知することは出来ないという限界を免れない。このように、乱流の最も古典的な“秩序構造”である“乱流二次流”は、理論的に解明されたとはいえず、この問題は依然として、乱流研究にとって残された重要課題の一つである。

(Fig. 2)

## 2. 層流の不安定性と乱流二次流

“乱流二次流”を流体力学の現象として考察するとき、それが層流状態では存在せず、乱流状態においてはじめて現れるということは、それが層流の不安定性に起因するものであることを強く示唆している。管の中の層流が不安定になったとき、境界層における Tollmien-Schlichting 波のような、軸方向に一定の波数をもつ正弦波攪乱が発生すると考えられる。この正弦波攪乱が有限の大きさにまで増幅されると、運動方程式の非線形性のために高波数成分が発生し、その結果、それぞれの波数成分の自己相互作用によって、0 波数成分が形成される。この 0 波数成分は軸方向には変化せず、また時間的振動を伴わないため、軸方向の定常的な縦渦を表わす。これは“乱流二次流”に他ならない。

このようにして、われわれは、“乱流二次流”を層流の不安定性に基づく有限振幅攪乱の 0 波数成分であると理解する。そして具体的には、長方形管内の乱流二次流をこのやり方で導くことを試みる。長方形管内の流れを対象とするのは、それが攪乱の直交関数系展開による取扱いに適しており、かつ、工学的にも広い応用範囲をもつためである。

問題は、これまで、この層流の線形安定特性が調べられていなかったことである。従来、層流の安定性は、速度が 1 つの座標軸の方向にのみ変化する平面平

行流、軸対称平行流、またはそれらに近い流れについては調べられていたが、長方形管流のような2つの座標軸の方向に変化する流れには全く手が付けられていなかった（巽と後藤 [5]）。

このため、われわれはまず、長方形管内の層流の線形安定特性を調べることとし、速度を2つの直交座標軸方向に Legendre 関数系に展開する方法を用いて、安定特性を数値的に調べた（Tatsumi & Yoshimura [6] を参照）。つぎに第2段階として、同じ方法を同じ層流の非線形安定性問題に適用して、有限振幅攪乱の時間的发展の模様を数値的に調べた。興味ある結果として、実験的に観測された“乱流二次流”の断面内流線図に極めてよく似た流線図が、有限振幅攪乱の0波数成分として得られた。このことは、われわれの研究の方向が基本的には正しかったことを示すものといえよう。

われわれの研究が第1段階から第2段階に進みつつあった頃、われわれは、故谷一郎教授が生前、この問題に興味をもっておられたことを知った。教授は、1988年に航空宇宙技術研究所で開かれた研究会において、『乱流二次流れの安定論的考察』と題する講演[7]をされ、つぎのように述べておられる。『乱流二次流れの発生を、広い意味での不安定現象として捉える試みがなされてよいのではないと思われる。このことは、数年前に希望したところであるが、長方形流路の安定解析の困難のためか、未だに実現されていない。』われわれは、この発想の一致に驚くとともに、同教授の生前にわれわれの第1段階の結果について報告できなかったことを残念に思う次第である。

本報告では、まず、長方形管内の層流の線形安定特性に関する結果の概略を述べ、ついで、非線形安定特性についてこれまで得られた結果を紹介することとしたい。

### 3. 長方形管流の線形安定性

長方形管内の層流の線形安定性を調べるため、Fig. 3 に示すように、直角座標  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  の  $x$  軸を管軸の方向にとり、 $y$  軸と  $z$  軸をそれぞれ長方形断面の短辺と長辺に平行にとる。短辺の長さを  $2L$ 、長辺の長さを  $2AL$  ( $A \geq 1$ ) とし、すべての長さを  $L$  で無次元化する。管軸上の層流の速度を  $U_0$  とし、すべての速度を  $U_0$  で無次元化すると、層流の速度は、

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U(y, z), 0, 0), \quad U(0, 0) = 1 \quad (1)$$

のように表わされ、層流の Reynolds 数は、 $R = U_0 L / \nu$  ( $\nu$ : 流体の動粘性率) で定義される。

(Fig. 3)

層流(1)に加わる攪乱として、 $x$  軸方向に波数  $\alpha (>0)$  の正弦波攪乱、

$$u(\mathbf{x}, t) = u(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (2)$$

を考える。ここに、 $c$  は複素数  $c = c_r + ic_i$  で、 $c_r$  は攪乱の位相速度、 $\alpha c_i$  は対数増幅率を表わす。 $c_i > 0$  のとき、攪乱は時間的に増大するから層流は不安定となり、 $c_i < 0$  のとき、攪乱は減衰するから層流は安定となる。

攪乱(2)の振幅が微小である場合の層流(1)の線形安定性に関しては、まず、層流(1)の座標  $y$  および  $z$  に関する対称性から、Fig. 4 に示すようなパリティの異なる4つの攪乱のモード、I、II、III、IV が存在することがわかる。

(Fig. 4)

安定性の計算の結果、層流は モード I および II の攪乱に対して不安定で、III および IV の攪乱に対して安定であることがわかる。モード I および II の攪乱に対しては、Fig. 5 に示すような中立安定曲線が存在するが、この結果から明らかに、層流は、モード I に対しては  $A \geq 3.2$  の範囲で不安定、モード II に対しては  $A \geq 5$  の範囲で不安定であり、さらに一般的に モード I に対しては、モード II に対してよりも不安定度が高いことがわかる ([6])。

(Fig. 5)

#### 4. 長方形管流の非線形不安定性

(2) の形の微小な正弦波攪乱が有限の大きさにまで成長したとき、または、最初から有限振幅の正弦波攪乱が与えられたとき、いずれにしても、運動方程式の非線形性のために、高波数および 0 波数成分が発生し、攪乱は Fourier 級数、

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum u_n(y, z, t) \exp[in\alpha x] \quad (3)$$

の形をとる。ここに、 $n$  はすべての整数値をとるものとする。左辺は明らかに実数であるから、振幅関数  $u_n$  は条件  $u_{-n} = u_n^*$  ( $*$  は共役複素数) を満たさなければならない。

とくに、攪乱 (3) の波形を限定して、

$$u(x, t) = \sum u_n(y, z) \exp[i n \alpha (x - ct)] \quad (4)$$

とおくと、すべての波数成分が同一の位相速度で伝播する波束形の攪乱を考えることになる。

(3)、(4)のいずれの型の攪乱を考えるにせよ、攪乱の軸方向の平均速度は、

$$\langle u \rangle = u_0(y, z, t) \quad (5)$$

となる。したがって、 $u_0$  が、乱流二次流に相当する縦渦の平均速度を表わすことは明かであろう。また、乱流二次流を含む乱流全体の平均速度は、

$$\langle U + u \rangle = U(y, z) + u_0(y, z, t) \quad (6)$$

によって直ちに求められる。

上にも述べたように、長方形管の乱流二次流に関する実験と数値計算は、これまで、ほとんどが  $A = 1$  の正方形管の場合に限られている。このため、ここでも  $A = 1$  の場合だけを考えることにする。 $A = 1$  の場合には、層流はすべてのモードの微小攪乱に対して線形安定であるが、ここでは、層流は有限振幅攪乱に対しては亜臨界不安定であり、臨界振幅以上の振幅の攪乱に対しては非線形不安定となるものとする。

一般に、非線形安定性と不安定性との境界としての中立状態には、その近傍のすべての状態が漸近する平衡状態と、逆に、近傍のすべての状態が遠ざかる臨界状態とがある。いま、攪乱のエネルギー振幅を  $E$  とすると、Reynolds 数  $R$ 、波数  $\alpha$ 、振幅  $E$  を直角座標軸とする空間において、中立状態を表わす 1 つの曲面、すなわち中立曲面が存在する。そして、中立曲面の上半面は、平衡状態に対応する平衡曲面となり、下半面は、臨界状態に対応する臨界曲面となる。したがって、平衡振幅は常に臨界振幅よりも大きくなる。

中立曲面の所在を確かめるには、微小振幅  $E \rightarrow 0$  の極限での中立曲線、

$$c_i(R, \alpha) = 0 \quad (7)$$

から出発して、(4)の形の攪乱について、振幅  $E$  の値を徐々に上げていくことによって中立曲面を見出す方法が適当である。Fig. 6 には、長方形管流のアスペクト比  $A \rightarrow \infty$  の極限である平面 Poiseuille 流に対して、Herbert[8] によって求められた中立曲面を示す。ここでは計算の都合上、(4)の無限級数は有限項  $n = \pm N$  で打ち切り、 $N = 1 \sim 4$  程度の数をとる近似が用いられている。これは一見乱暴な近似のようであるが、非線形安定性理論ではしばしば用いられる近似

であって、いまの場合、中立曲面は  $N = 1, 2$  ですでに定性的に正しい結果が得られ、 $N = 3, 4$  は量的な補正を与えるに過ぎないことが知られている ([8])。

(Fig. 6)

しかし、 $A = 1$  の長方形管流の場合は線形安定であるため、手がかりとなる中立曲線(7)が存在しない。このため、ここでは、(2)の形の正弦波攪乱を初期攪乱として、これにさまざまな初期振幅を与え、これから出発した(3)の形の非線形攪乱の時間発展を追跡して、中立状態を発見する方法をとった。ここでは、 $N = 1$ 、すなわち  $n = -1, 0, 1$  の3波数成分、実質的には0、1の2成分をとり、それらに対する発展方程式を、 $\alpha = 1.0$ 、 $R = 1000, 2000, 3000$  について、さまざまな初期攪乱に対して解いた結果について報告する。

初期攪乱としてはモード I をとり、さまざまな初期振幅  $E$  のもとに解の時間発展を追跡したところ、 $R = 3000$  では Fig. 7 に示すように、 $E = 0.0115$  (任意単位) に対して中立状態への漸近が見られたが、 $R = 1000$  および  $2000$  ではどのような  $E$  の値に対しても中立状態は見出されなかった。このことから、中立曲面は、 $2000$  と  $3000$  との間のある値以上の Reynolds 数 に対して存在するものと推定される。中立曲面の位置を正確に決定するには、一般型の攪乱(3)に対する発展方程式を解くよりも、より限定された攪乱(4)に対する固有値方程式を解く方が効率的である。この作業は、 $N = 2$  に対する発展方程式の解を求めることとともに現在進行中であり、その結果については次の機会に報告したい。

(Fig. 7)

## 5. 0 波数攪乱と乱流二次流

さて、本研究の主目標である乱流二次流についてであるが、攪乱の時間発展の経過から分かったことは、攪乱の0波数成分の断面内流線の模様が、もっぱら初期攪乱のモードによって決まり、Reynolds数  $R$ 、波数  $\alpha$ 、初期振幅  $E$  などのパラメータおよび時間  $t$  にほとんど影響されないということである。

例として、初期攪乱のモード I (=IV)、II、III に対する攪乱の0波数成分の断面内流線図を、それぞれ初期攪乱の流線図と対比して、Fig. 8 に示す。図から明かなように、モード II に対する断面内流線図は、乱流二次流のそれと良く似ており、流れの向きもまた一致している。このことは、“乱流二次流”が

層流の非線形不安定性に基づく有限振幅攪乱の 0 波数成分であるとする、われわれの主張の正しさを示すものであると思われる。

(Fig. 8)

ここに新たな疑問が生ずる。では何故、モード I および III の初期攪乱による断面内流線図は、乱流二次流として観測されないのか。この疑問に対して明確な解答を与えるには、現在のわれわれの計算結果では不十分である。そのためには、より広い範囲の Reynolds 数、波数、振幅に対する計算を実行して、それぞれのモードに対する中立曲面を確定する必要があるものと思われる。

一方、管内乱流の実験や直接数値シミュレーションによる研究に対しても、望むべきことが多い。従来の研究では、初期攪乱は自然発生によるか、あるいは乱数による励起によるものがほとんどであった。これでは、管内流における乱流遷移を論ずるには不十分であって、そのためには、人為的に制御された初期攪乱を導入することが不可欠である。ちょうど平板境界層における Schubauer & Skramstad [9] の実験のような、制御された攪乱による乱流遷移の実験、またはそれに相当する直接数値シミュレーションが、管内流においても遠からず行われることを期待したい。

### 引用文献

- [1] Nikuradse, J. (1926): Forsch. Ver. deutsch. Ing. 281, pp.13-14.
- [2] Prandtl, L. (1927): Verh. 2 intern. Kongr. techn. Mech. Zurich, 1926, pp. 70-74.
- [3] Bradshaw, P. (1987): Ann. Rev. Fluid Mech. 19, 53-74.
- [4] Demuren, A.O. & Rodi, W. (1984): J. Fluid Mech. 140, 189-222.
- [5] 巽友正と後藤金英 (1976): 流れの安定性理論. 産業図書.
- [6] Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1990): J. Fluid Mech. 212, 437-449.
- [7] 谷一郎 (1990): 航空宇宙技術研究所 特別資料 SP-11, pp.41-42.
- [8] Herbert, T. (1977): AGARD, cp-224.
- [9] Schubauer, G.K. & Skramstad, H.K. (1947): J. Res. Nat. Bur. Stand. 38, 251-292; J. Aero. Sci. 14, 69-78.



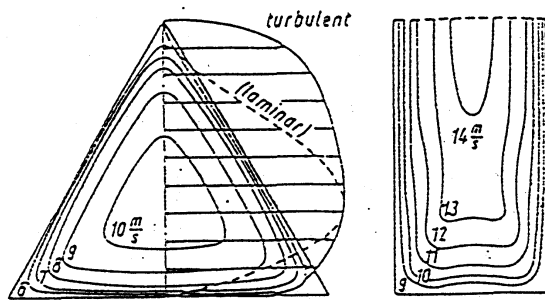


Bild 4/42. Isotachen und Geschwindigkeitsprofile über der Mittellinie eines Dreieckrohrs bei turbulenter und laminarer Strömung

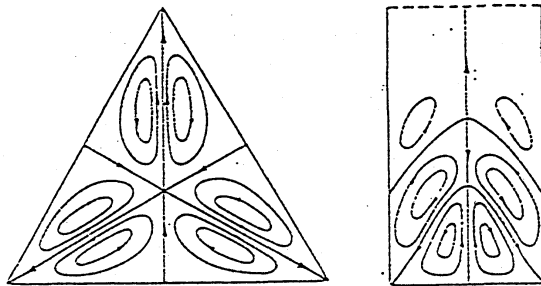


Bild 4/43. Sekundärströmungen zweiter Art

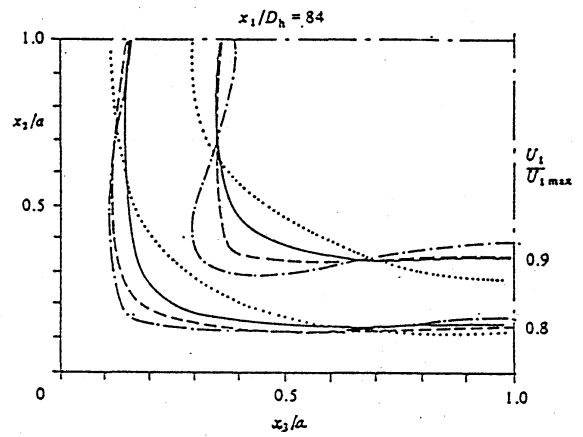
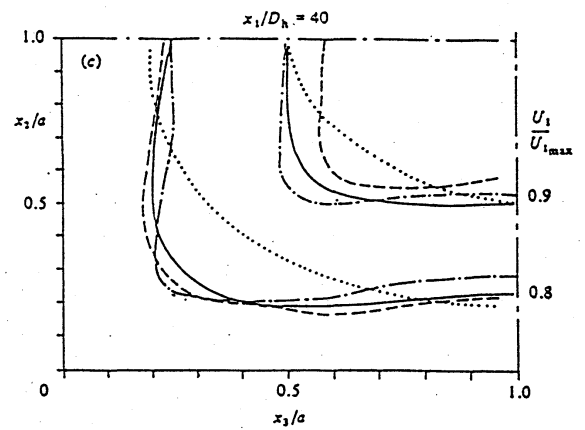


Fig.1

Fig.2

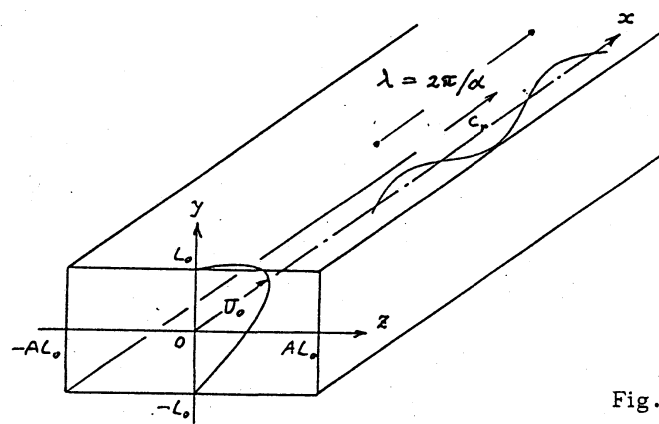


Fig.3

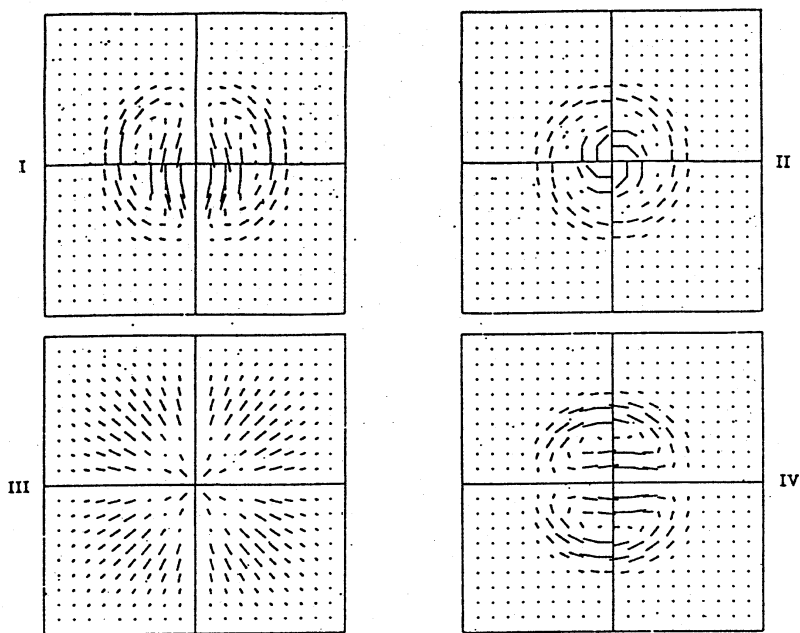


Fig.4

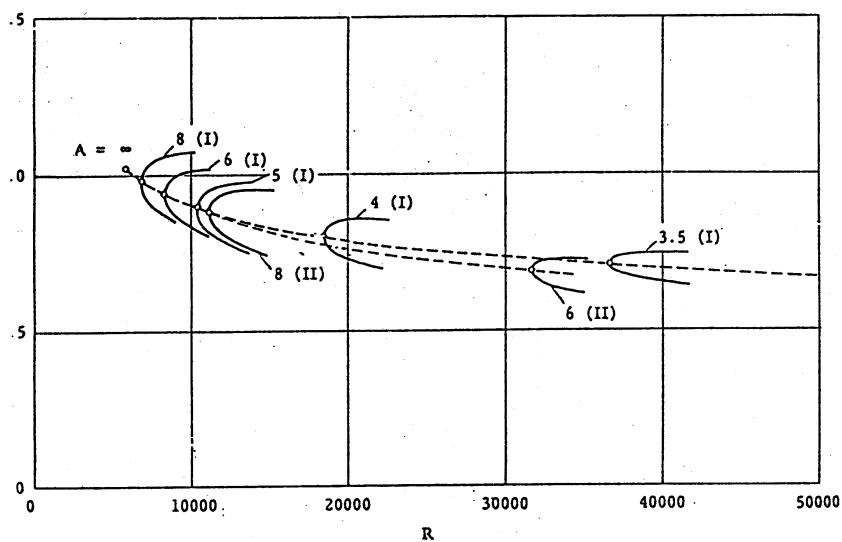


Fig.5

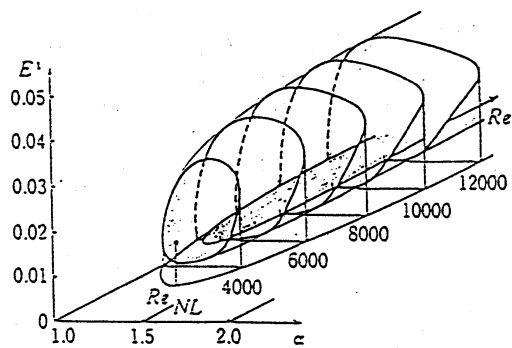


Fig.6

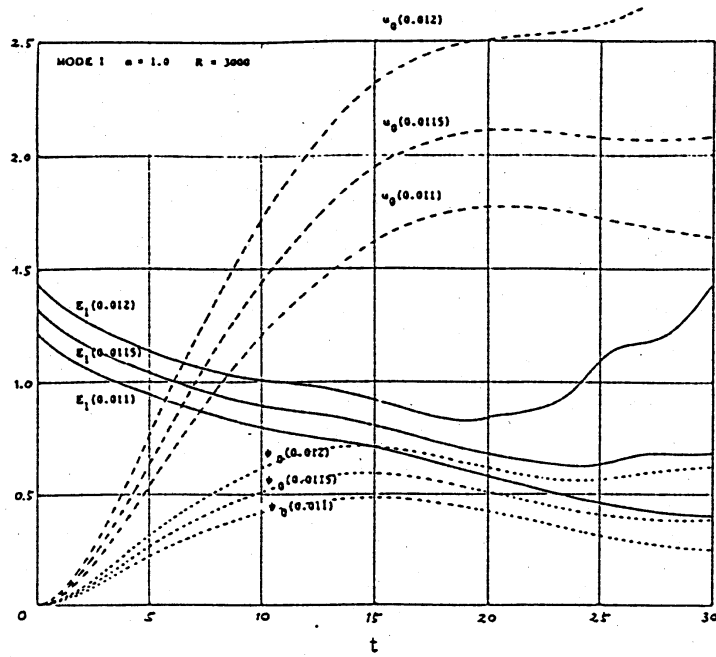


Fig. 7  
 $E_1$ : Mean-square velocity of basic disturbance.  
 $u_0$ : Mean-square axial velocity of 0 wave-number disturbance.  
 $\psi_0$ : Mean-square cross-sectional velocity of 0 wavenumber disturbance.

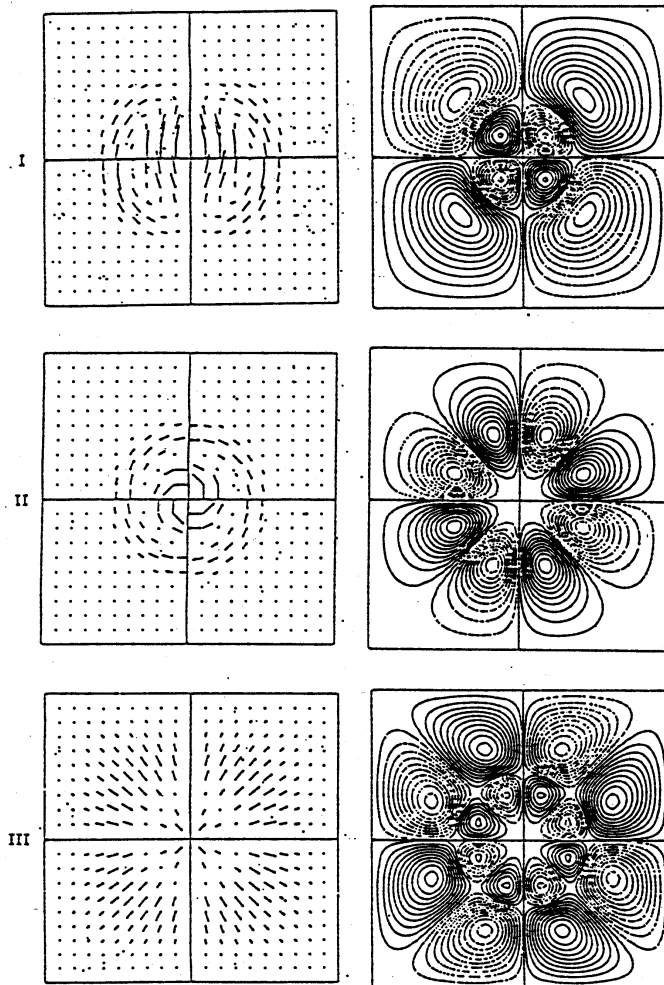


Fig. 8  
 Cross-sectional streamlines of 0 wavenumber disturbances.  
 Modes: I, II, III.